УДК 519.644; 519.711

В.К. Задірака, О.М. Коломис, Л.В. Луц, С.С. Мельникова
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, Україна
Проспект Академіка Глушкова, 40, Київ, 03680 МСП, Україна

Ефективні за точністю алгоритми обчислення оцінки частотної характеристики лінійної моделі об'єктів керування з постійними параметрами

V.K. Zadiraka, O.M. Kolomys, L.V. Luts, S.S. Melnikova
Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine
40 Glushkova ave., Kyiv, Ukraine, 03187

Effective by Accuracy Algorithms for Calculation of Estimation of Frequency Characteristic of Linear Model of Control Objects with Permanent Parameters

В.К. Задирака, Е.Н. Коломыс, Л.В. Луц, С.С. Мельникова
Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины
Проспект Академика Глушкова, 40, Киев, 03680 МСП, Украина

Эффективные по точности алгоритмы вычисления оценки частотной характеристики линейной модели объектов с постоянными параметрами

Запропоновано два підходи до побудови ефективних за точністю алгоритмів обчислення оцінки частотної характеристики лінійної моделі об'єктів керування з постійними параметрами, які базуються на використанні перетворення Фур'є. Розглянуто випадки, коли відомі алгоритми наближеного обчислення перетворення Фур'є та оцінки їх похибки, а також коли ці алгоритми та відповідно оцінки їх похибки невідомі. Наведені оцінки похибки обчислення оцінки частотної характеристики за допомогою розроблених підходів в обох випадках.
Ключові слова: ефективні за точністю алгоритми, частотна характеристика, перетворення Фур'є, оцінки похибки, лінійна модель.

The two approaches to construction of effective by accuracy algorithms for calculation of estimation of frequency characteristic of linear model of control objects with permanent parameters, based on the use of Fourier transformation are suggested. Both the case when algorithms of approximate calculation of Fourier transformation and estimation of their errors are known as well as the case when such algorithms and corresponding estimations of their errors are unknown, are considered. Estimations of the calculation error of the calculation of frequency characteristic by means of the approach developed in both cases are presented.
Key words: effective by accuracy algorithms, frequency characteristic, Fourier transformation, estimation of error, linear model.

Предложены два подхода к построению эффективных по точности алгоритмов вычисления оценки частотной характеристики линейной модели объектов управления с постоянными параметрами, которые основаны на использовании преобразования Фурье. Рассмотрены случаи, когда известны алгоритмы приближенного вычисления преобразования Фурье и оценки их погрешности, а также когда эти алгоритмы и соответственно оценки их погрешности неизвестны. Приведены оценки погрешности вычисления оценки частотной характеристики с помощью разработанных подходов в обоих случаях.
Ключевые слова: эффективные по точности алгоритмы, частотная характеристика, преобразование Фурье, оценки погрешности, линейная модель.

Властивості об’єктів керування, систем автоматичного керування (САК) або окремих її ланок у перехідних процесах або динамічних режимах визначаються за допомогою динамічних характеристик (ДХ). В залежності від властивостей системи та розв’язуваних задач аналізу і синтезу для опису перехідних процесів Використовуються диференціальні рівняння, передаточні функції, частотні характеристики та ін. Зокрема, частотна характеристика широко використовується при перевірці стійкості САК, аналізі якості процесів керування у відповідності до обраної цільової функції, оцінці та ідентифікації параметрів математичних моделей об’єктів керування та окремих ланок САК.

Для побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів необхідні оцінки їх динамічних характеристик.

Розглянемо лінійні моделі ОК з одним входом і виходом. Рівняння динаміки у випадку довільної лінійної моделі об’єкта має вигляд [1]:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\,,\ k(t,\tau)=0\,,\quad t<0\,, \tag{1}$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – відповідно входи та виходи об’єкта, $k(t,\tau)$ – *імпульсна перехідна функція* (ІПФ) об’єкта.

Для об’єктів з постійними параметрами (стаціонарних) вид реакції залежить тільки від різниці $t-\tau$.

Тому для таких об’єктів $k(t,\tau)=k(t-\tau)$ і співвідношення (1) прийме вигляд

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)k(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\infty}k(u)x(t-u)\,du\,,\ u=t-\tau\,. \tag{2}$$

У випадку лінійної стаціонарної моделі об’єкта (існують інтеграли $\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$ та $\int_{0}^{\infty}y(t)e^{-i\omega t}dt$), застосувавши перетворення Фур’є до обох частин співвідношення (2), в силу теореми про згортку двох функцій отримаємо:

$$\Upsilon(i\omega)=\Phi(i\omega)\cdot X(i\omega),$$

де $X(i\omega)$, $\Upsilon(i\omega)$, $\Phi(i\omega)$ – перетворення Фур’є відповідно від $x(t)$, $y(t)$ і $k(t-\tau)$.

Частотною характеристикою лінійної моделі об’єкта називається відношення перетворення Фур’є $\Upsilon(i\omega)$ вихідної величини $y(t)$ до перетворення Фур’є $X(i\omega)$ вхідної величини $x(t)$ (при нульових початкових умовах):

$$\Phi(i\omega)=\frac{\Upsilon(i\omega)}{X(i\omega)}\,. \tag{3}$$

Знаючи частотну характеристику $\Phi(i\omega)$ та перетворення Фур’є вхідного сигналу $X(i\omega)$, за формулою (3) можна знайти перетворення Фур’є вихідної величини $\Upsilon(i\omega)$.

Далі, застосовуючи до нього обернене перетворення Фур’є, отримаємо процес зміни вихідної величини ОК при довільному впливі $x(t)$ на нього:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(i\omega)\Phi(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Таким чином, частотна характеристика повністю характеризує динамічні властивості САК і тому є однією з її важливих характеристик.

Частотна характеристика і ІПФ пов'язані між собою за допомогою прямого і оберненого перетворення Фур'є

$$\Phi(i\omega)=\int_0^\infty k(u)e^{-i\omega u}du,\quad k(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Phi(i\omega)e^{i\omega u}du.$$

Мета даної роботи - запропонувати загальні підходи до побудови алгоритмів наближеного обчислення оцінок частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ неперервних виробничих процесів та отримати оцінки їх похибок.

Постановка задачі

Для обчислення оцінки частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ пропонуються наступні підходи.

Підхід 1. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – деякі реєстровані відповідно входи та виходи об'єкта і представляють собою функції часу t, які можна занурити, в залежності від відомої апріорної інформації про об'єкт керування, в деякі класи функцій F_1 і F_2 відповідно.

Нехай $R_x(i\omega)$ – результат наближеного обчислення перетворення Фур'є $X(i\omega)$ за допомогою квадратурної формули A_1, яка використовує N значень функції $x(t)\in F_1$, $x_j=x(t_j)$, $j=\overline{0,N-1}$, $R_Y(i\omega)$ – результат наближеного обчислення перетворення Фур'є $\Upsilon(i\omega)$ за допомогою квадратурної формули A_2, яка використовує N значень функції $y(t)\in F_2$ $y_j=y(t_j)$, $j=\overline{0,N-1}$. В якості A_1 та A_2 можна використовувати ефективні за точністю та (або) швидкодією на класах F_1 і F_2 квадратурні формули обчислення перетворення Фур'є [2], [3].

Позначимо $\varepsilon_X=X(i\omega)-R_X(i\omega)$ та $\varepsilon_Y=Y(i\omega)-R_Y(i\omega)$ – абсолютні похибки методу обчислення відповідно $X(i\omega)$ за допомогою квадратурної формули A_1 та $\Upsilon(i\omega)$ за допомогою квадратурної формули A_2:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_X|&=|X(i\omega)-R_x(i\omega)|\le E_X=\max_{x(t)\in F_1}|X(i\omega)-R_x(i\omega)|,\\ |\varepsilon_Y|&=|Y(i\omega)-R_y(i\omega)|\le E_Y=\max_{y(t)\in F_2}|Y(i\omega)-R_y(i\omega)|,\end{aligned}\tag{4}$$

де E_X, E_Y – відповідно оцінки похибок квадратурних формул A_1 та A_2 наближеного обчислення перетворення Фур'є $X(i\omega)$ та $\Upsilon(i\omega)$ на класах F_1 і F_2 [2-4].

За аналогією з (3) запишемо вираз для обчислення оцінки частотної характеристики $\Phi(i\omega)$

$$\Phi_R(i\omega)=\frac{R_y(i\omega)}{R_x(i\omega)}.\tag{5}$$

Для оцінки ε_Φ похибки обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_R(i\omega)$ справедливе співвідношення

$$|\varepsilon_\Phi|=|\Phi(i\omega)-\Phi_R(i\omega)|\le E(F_1,F_2)=\max_{\substack{x(t)\in F_1,\\ y(t)\in F_2}}|\Phi(i\omega)-\Phi_R(i\omega)|.\tag{6}$$

Доведемо лему, яка буде необхідна нам в подальшому для обчислення оцінки $|\varepsilon_\Phi|$.

Лема. Для довільного дійсного числа z, $0 \le z \le 0{,}5$, та довільного натурального $n \ge 1$ справедлива оцінка

$$\frac{1}{1-z} \le 1 + z + z^2 + ... + z^n \cdot 2\,. \tag{7}$$

Доведення. Відомо [5], що $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$. Для доведення твердження (7) необхідно довести, що

$$z^n \ge z^{n+1} + z^{n+2} + ...\,. \tag{8}$$

Нерівність (8) запишемо у вигляді $z^n \ge z^{n+1}(1 + z + z^2 + ...) = z^{n+1} \cdot \frac{1}{1-z}$. Скорочуючи на z^n, отримаємо:

$$1 \ge \frac{z}{1-z}\,. \tag{9}$$

Якщо $|z| \ge 0$ і $|z| \le 0{,}5$, у співвідношенні $1 - \frac{z}{1-z} = \frac{1-2z}{1-z}$ чисельник і знаменник додатні, то $\frac{1-2z}{1-z} \ge 0$. Отже виконується нерівність (9), а значить, справедлива нерівність (7).

Лема доведена.

Побудуємо оцінку ε_Φ вигляду (6) обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_R(i\omega)$, використовуючи співвідношення (4), (5), (7).

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Для оцінки $|\varepsilon_\Phi|$ похибки обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_R(i\omega)$ з точністю до величин першого порядку мализни відносно ε_X і ε_Y справедливе співвідношення:

$$|\varepsilon_\Phi| \le \frac{|R_Y(i\omega)|}{|R_X(i\omega)|}\left(\frac{|\varepsilon_Y|}{|R_X(i\omega)|} + \frac{|\varepsilon_X|}{|R_Y(i\omega)|}\right). \tag{10}$$

Доведення. Оцінимо

$$|\varepsilon_\Phi| = |\Phi(i\omega) - \Phi_R(i\omega)| = \left|\frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)} - \frac{R_Y(i\omega)}{R_X(i\omega)}\right| = \left|\frac{R_Y(i\omega) + \varepsilon_Y}{R_X(i\omega) + \varepsilon_X} - \frac{R_Y(i\omega)}{R_X(i\omega)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(R_Y(i\omega) + \varepsilon_Y)R_X(i\omega) - R_Y(i\omega)(R_X(i\omega) + \varepsilon_X)}{(R_X(i\omega) + \varepsilon_X)R_X(i\omega)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_Y R_X(i\omega) - \varepsilon_X R_Y(i\omega)}{(R_X(i\omega) + \varepsilon_X)R_X(i\omega)}\right| =$$

$$= \frac{|\varepsilon_Y R_X(i\omega) - \varepsilon_X R_Y(i\omega)|}{|R_X(i\omega) + \varepsilon_X||R_X(i\omega)|}\,.$$

Для спрощення наступних викладок в подальшому аргумент $i\omega$ опустимо.

Використовуючи нерівності $|a+b| \ge |a| - |b|$ і $|a-b| \le |a| + |b|$, маємо:

$$|\varepsilon_\Phi| = \frac{|\varepsilon_Y R_X - \varepsilon_X R_Y|}{|R_X + \varepsilon_X||R_X|} \le \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{(|R_X| - |\varepsilon_X|)|R_X|} = \left(1 - \frac{|\varepsilon_X|}{|R_X|}\right)^{-1} \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{|R_X|^2}\,. \tag{11}$$

Нехай $|\varepsilon_X| << |R_x|$ і $|\varepsilon_Y| << |R_y|$, тоді можна застосувати лему, взявши у співвідношенні (7) значення $z = \frac{|\varepsilon_X|}{|R_X|}$. Поклавши $n = 1$, отримаємо:

$$\left(1 - \frac{|\varepsilon_X|}{|R_X|}\right)^{-1} \leq 1 + \frac{2 \cdot |\varepsilon_X|}{|R_X|}.$$

Тоді

$$|\varepsilon_\Phi| \leq \left(1 - \frac{|\varepsilon_X|}{|R_X|}\right)^{-1} \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{|R_X|^2} \leq \left(1 + 2\frac{|\varepsilon_X|}{|R_X|}\right) \cdot \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{|R_X|^2} =$$

$$= \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{|R_X|^2} + \frac{2}{|R_X|^2}|\varepsilon_X||\varepsilon_Y| + \frac{2|R_Y|}{|R_X|^3}|\varepsilon_X|^2. \quad (12)$$

Виключаючи члени другого порядку малості відносно $|\varepsilon_X|$ і $|\varepsilon_Y|$, з точністю до величин першого порядку малості відносно $|\varepsilon_X|$ і $|\varepsilon_Y|$, маємо оцінку

$$|\varepsilon_\Phi| \leq \frac{|\varepsilon_Y||R_X| + |\varepsilon_X||R_Y|}{|R_X|^2} = \frac{|R_Y|}{|R_X|}\left(\frac{|\varepsilon_Y|}{|R_X|} + \frac{|\varepsilon_X|}{|R_Y|}\right).$$

Теорема 1 доведена.

Наслідок 1. У випадку, коли відомі оцінки похибок E_X і E_Y (див. (4)) квадратурних формул A_1 та A_2 обчислення перетворення Фур'є $X(i\omega)$ та $Y(i\omega)$ на класах функцій F_1 і F_2, має місце наступна оцінка похибки методу обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_R(i\omega)$ на відповідних класах функцій

$$E(F_1, F_2) = \max_{\substack{x(t)\in F_1,\\ y(t)\in F_2}} |\Phi(i\omega) - \Phi_R(i\omega)| \leq \frac{|R_Y|}{|R_X|}\left(\frac{E_X}{|R_X|} + \frac{E_Y}{|R_Y|}\right),$$

що і доводить твердження (10).

Наслідок 2. Якщо $F_1 = F_2 = F$, $A_1 = A_2$ *і* $|\varepsilon| = \max(|\varepsilon_X|, |\varepsilon_Y|)$, то

$$|\varepsilon_\Phi| \leq |\varepsilon| \cdot \frac{|R_y(i\omega)| + |R_x(i\omega)|}{R_x^2(i\omega)}. \quad (13)$$

У цьому випадку співвідношення (10) прийме вигляд

$$|\varepsilon_\Phi| \leq \frac{|R_y|}{|R_x|}\left(\frac{|\varepsilon_Y|}{|R_y|} + \frac{|\varepsilon_X|}{|R_x|}\right) = \frac{|R_y| \cdot |\varepsilon|}{|R_x|}\left(\frac{1}{|R_y|} + \frac{1}{|R_x|}\right) \leq |\varepsilon| \cdot \frac{|R_y| + |R_x|}{R_x^2}. \quad (14)$$

Співвідношення (5) дає загальний підхід до побудови алгоритму $\Phi_R(i\omega)$ – наближеного обчислення частотної характеристики $\Phi(i\omega)$, у випадку, коли використовуються квадратурні формули A_1 та A_2 обчислення оцінки перетворення Фур'є, для яких відомі їх оцінки похибки методу ε_X і ε_Y, зокрема, ефективні за точністю та (або) швидкодією на класах F_1 і F_2 квадратурні формули A_1 та A_2 наближеного обчислення $R_x(i\omega)$ та $R_y(i\omega)$ як інтегралів від швидкоосцилюючих функцій [2], [3].

У зв'язку з розвитком комп'ютерних технологій та ускладненням технологічних процесів зростає вимога до якості математичних моделей, які описують досліджувані об'єкти керування. Для аналізу точності математичних моделей об'єктів керування все частіше використовують програмне забезпечення, яке містить достатньо ефективні алгоритми розв'язання багатьох задач обчислювальної математики (напр., відомі пакети Mathlab, MathCad [6], [7]). Програмні модулі таких пакетів можна використовувати для обчислення динамічних та імовірнісних характеристик неперервних виробничих процесів, наприклад, для наближеного обчислення оцінки частотної характеристики (5), але в цьому випадку оцінки ε_X і ε_Y невідомі, оскільки невідомі алгоритми A_1 та A_2, а отже, ми не можемо отримати оцінки (10), (13). В такому випадку для обчислення оцінок частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ пропонується наступний підхід.

Підхід 2. Побудова квадратурних формул, як правило, ґрунтується на алгоритмах апроксимації підінтегральної функції. Нехай $s_x(t)$ і $s_y(t)$ – функції, які апроксимують, відповідно підінтегральні функції $x(t)$ та $y(t)$ за допомогою ефективних за точністю алгоритмів апроксимації функцій на класах F_1 і F_2. Позначимо $\delta_x = x(t) - s_x(t)$ та $\delta_y = y(t) - s_y(t)$ – абсолютні похибки апроксимації відповідно $x(t)$ за допомогою функції $s_x(t)$ та $y(t)$ за допомогою функції $s_y(t)$, які можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} |\delta_x| &= |s_x(t) - x(t)| \le E_X = \max_{x(t)\in F_1} |s_x(t) - x(t)|, \\ |\delta_y| &= |s_y(t) - y(t)| \le E_Y = \max_{y(t)\in F_2} |s_y(t) - y(t)|, \end{aligned} \tag{15}$$

де E_X, E_Y – оцінки похибок апроксимації функцій $x(t)$ і $y(t)$ відповідно виразами $s_x(t)$ і $s_y(t)$ на класах F_1 і F_2.

Нехай $\Delta_X(i\omega) = X(i\omega) - S_X(i\omega)$, $\Delta_Y(i\omega) = Y(i\omega) - S_Y(i\omega)$ – похибки відповідно перетворення Фур'є оцінок δ_x і δ_y, де $X(i\omega)$, $\mathrm{Y}(i\omega)$ – перетворення Фур'є відповідно від $x(t)$, $y(t)$, $S_X(i\omega)$, $S_Y(i\omega)$ – перетворення Фур'є відповідно від функцій $s_x(t)$, $s_y(t)$. Тоді відповідно $X(i\omega) = S_X(i\omega) + \Delta_X(i\omega)$, $Y(i\omega) = S_Y(i\omega) + \Delta_Y(i\omega)$.

За аналогією з (5) запишемо вираз для апроксимації частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ з використанням $s_x(t)$ та $s_y(t)$:

$$\Phi_S(i\omega) = \frac{S_Y(i\omega)}{S_X(i\omega)}. \tag{16}$$

Для оцінки $E(F_1, F_2)$ похибки обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_S(i\omega)$ справедливе співвідношення

$$|\Delta_\Phi| = |\Phi(i\omega) - \Phi_S(i\omega)| \le E(F_1, F_2) = \max_{\substack{x(t)\in F_1, \\ y(t)\in F_2}} |\Phi(i\omega) - \Phi_S(i\omega)|. \tag{17}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Для оцінки Δ_Φ похибки обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_R(i\omega)$ з точністю до величин першого порядку мализни відносно δ_x і δ_y справедливе співвідношення:

$$|\Delta_\Phi| \le \frac{|S_y(i\omega)|}{|\omega|\cdot|S_x(i\omega)|}\cdot\left(\frac{|\delta_y|}{|S_y(i\omega)|}+\frac{|\delta_x|}{|S_x(i\omega)|}\right). \tag{18}$$

Доведення. Доведення теореми проведемо аналогічно доведенню теореми 1. Оцінимо

$$|\Delta_\Phi| = |\Phi(i\omega)-\Phi_S(i\omega)| = \left|\frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}-\frac{S_y(i\omega)}{S_x(i\omega)}\right| = \left|\frac{R_Y(i\omega)+\Delta_Y}{R_X(i\omega)+\Delta_X}-\frac{R_Y(i\omega)}{R_X(i\omega)}\right| =$$
$$\frac{|\Delta_Y R_X(i\omega)-\Delta_X R_Y(i\omega)|}{|R_X(i\omega)+\Delta_X||R_X(i\omega)|}.$$

Для спрощення наступних викладок у подальшому опустимо аргумент $i\omega$ та будемо використовувати нерівності $|a+b|\ge|a|-|b|$ і $|a-b|\le|a|+|b|$. Отримаємо

$$|\Delta_\Phi| = \frac{|\Delta_Y R_X-\Delta_X R_Y|}{|R_X+\Delta_X||R_X|} \le \frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{(|R_X|-|\Delta_X|)|R_X|} = \left(1-\frac{|\Delta_X|}{|R_X|}\right)^{-1}\frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{|R_X|^2}.$$

Далі, повторюємо ті ж міркування, що і при доведенні співвідношення (12) в теоремі 1. Враховуючи, що $|\Delta_X| << |R_x|$ і $|\Delta_Y| << |R_y|$, можна застосувати лему, взявши в співвідношенні (7) значення $z=\frac{|\Delta_X|}{|R_X|}$. Поклавши $n=1$, отримаємо: $\left(1-\frac{|\Delta_X|}{|R_X|}\right)^{-1} \le 1+\frac{2\cdot|\Delta_X|}{|R_X|}$.
Тоді

$$|\Delta_\Phi| \le \left(1-\frac{|\Delta_X|}{|R_X|}\right)^{-1}\frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{|R_X|^2} \le \left(1+2\frac{|\Delta_X|}{|R_X|}\right)\cdot\frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{|R_X|^2} =$$
$$= \frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{|R_X|^2}+\frac{2}{|R_X|^2}|\Delta_X||\Delta_Y|+\frac{2|R_Y|}{|R_X|^3}|\Delta_X|^2. \tag{19}$$

Виключаючи члени другого порядку малості відносно $|\Delta_X|$ і $|\Delta_Y|$, з точністю до величин першого порядку малості відносно $|\Delta_X|$ і $|\Delta_Y|$, маємо оцінку

$$|\Delta_\Phi| \le \frac{|\Delta_Y||R_X|+|\Delta_X||R_Y|}{|R_X|^2} = \frac{|R_Y|}{|R_X|}\cdot\left(\frac{|\Delta_Y|}{|R_X|}+\frac{|\Delta_X|}{|R_Y|}\right). \tag{20}$$

Обчислимо $\Delta_X(i\omega)=\int_0^\infty \delta_x e^{-i\omega t}dt = \delta_x\int_0^\infty e^{-i\omega t}dt = \frac{\delta_x}{i\omega}$. Аналогічно $\Delta_Y(i\omega)=\frac{\delta_y}{i\omega}$. Тоді

$$|\Delta_\Phi| \le \frac{|S_y|}{|\omega|\cdot|S_x|}\cdot\left(\frac{|\delta_y|}{|S_y|}+\frac{|\delta_x|}{|S_x|}\right),$$

що і доводить твердження (18).
Теорема 2 доведена.

Наслідок 3. У випадку, коли відомі оцінка похибки E_X на класі F_1 апроксимації $x(t)$ виразом $s_x(t)$ та оцінка похибки E_Y на класі F_2 апроксимації $y(t)$ виразом $s_y(t)$ (див. (15)), має місце наступна оцінка похибки методу обчислення $\Phi(i\omega)$ за допомогою $\Phi_S(i\omega)$ на відповідних класах функцій F_1 та F_2:

$$E(F_1,F_2)=\max_{\substack{x(t)\in F_1,\\ y(t)\in F_2}}\left|\Phi(i\omega)-\Phi_R(i\omega)\right|\le\frac{|R_Y|}{|R_X|}\left(\frac{E_X}{|R_X|}+\frac{E_Y}{|R_Y|}\right).$$

Наслідок 4. Якщо $F_1=F_2=F$, $s_x(t)=s_y(t)$ і $|\delta|=\max(|\delta_x|,|\delta_y|)$, то:

$$|\Delta_\Phi|\le\frac{\delta}{|\omega|}\cdot\left(\frac{|S_y(i\omega)|+|S_x(i\omega)|}{S_x^2(i\omega)}\right). \tag{21}$$

Позначимо $|\Delta(i\omega)|=\max(|\Delta_x(i\omega)|,|\Delta_y(i\omega)|)$. В цьому випадку співвідношення (20) має вигляд

$$|\Delta_\Phi|\le\frac{|R_y|}{|R_x|}\left(\frac{|\Delta_Y|}{|R_y|}+\frac{|\Delta_X|}{|R_x|}\right)\le\frac{|R_y|\cdot|\Delta|}{|R_x|}\left(\frac{1}{|R_y|}+\frac{1}{|R_x|}\right)\le\frac{\delta}{|\omega|}\cdot\left(\frac{|S_y|+|S_x|}{S_x^2}\right), \tag{22}$$

оскільки $\Delta(i\omega)=\int_0^\infty \delta e^{-i\omega t}dt=\delta\int_0^\infty e^{-i\omega t}dt=\frac{\delta}{i\omega}$.

Теорема 2 дає загальний підхід до побудови алгоритму $\Phi_s(i\omega)$ апроксимації частотної характеристики $\Phi(i\omega)$, який використовує алгоритми $s_x(t)$ та $s_y(t)$ апроксимації функцій $x(t)$ та $y(t)$ (вхідного і вихідного сигналів), для яких відомі їх оцінки похибки апроксимації δ_x і δ_y. Зокрема, в якості $s_x(t)$, $s_y(t)$ можна використовувати апроксимацію функцій рядами Фур'є, сплайнами, інтерполяційними поліномами, дробово-раціональними виразами тощо [3], [8-10]. Такий підхід доцільно використовувати у випадку, коли значення похибок ε_x і ε_y квадратурних формул A_1 та A_2 обчислення оцінок перетворення Фур'є невідомі, або невідомі самі A_1 та A_2 (як при використанні штатного математичного забезпечення). Потреба в апроксимації функцій $x(t)$ та $y(t)$ може виникати на практиці доволі часто, особливо у випадках, коли обчислювати значення $x(t)$ та $y(t)$ із заданою точністю «важко», або взагалі неможливо, оскільки, як правило, ці функції задаються своїми значеннями як результат експерименту, або можуть мати складну аналітичну будову і потребувати значних обчислювальних затрат. У таких ситуаціях природно замість функцій $x(t)$ та $y(t)$ використовувати деякі інші функції $s_x(t)$ та $s_y(t)$, які достатньо «близькі» до них, але мають більш простий аналітичний вигляд.

Таким чином, у цьому випадку задача обчислення частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ зводиться до задачі апроксимації функцій $x(t)$ та $y(t)$ на деяких класах функцій, які визначаються досліджуваним об'єктом керування.

У зв'язку з необхідністю обчислювати перетворення Фур'є в співвідношеннях (5), (16) та в деяких інших випадках доцільно використовувати чисельні методи обчислення дискретного перетворення Фур'є, ефективні за швидкодією. Серед таких

методів можна назвати алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), що в $N/\log N$ разів економить кількість арифметичних операцій у порівнянні зі стандартними методами і є ефективним за швидкодією [2], [3] (у випадку, коли функції належать класу C – неперервних функцій). Також доцільно використовувати наведені в роботі [9], ефективні за точністю алгоритми апроксимації рядами Фур'є з використанням оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул для обчислення коефіцієнтів Фур'є на деяких класах функцій.

У випадках, коли класи $F_i \equiv C_{L,\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, C_L, $W_{r,L}$, $r>1$, $W_{2,r,L}$ $i=1,2$, де $C_{L,\alpha}$ – клас функцій, що задовольняють умові Гельдера з константою L и показником α, $0<\alpha\le 1$: $\left|f(x')-f(x'')\right|\le L\left|x'-x''\right|^{\alpha}$, $x', x'' \in [a,b]$; C_L – клас функцій Ліпшица (клас $C_{L,\alpha}$, $\alpha=1$); $W_{r,L}$, $r>1$ – клас функцій, що мають $(r-1)$-у неперервну похідну, і при цьому $f^{(r-1)}(x)\in C_L$, в роботах [2], [3] побудовані ефективні за точністю та швидкодією на класах F_i квадратурні формули обчислення оцінок перетворення Фур'є як інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та отримані оцінки їх точності. Відмічено [2], [4], що підвищення «потенційної спроможності» квадратурних формул обчислення оцінок перетворення Фур'є може бути здійснено шляхом звуження класів F підінтегральних функцій $f(t)\in F$ на клас F_N, коли $\{t_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1}=\{f(t_i)\}_0^{N-1}$ фіксовані (наприклад, випадок, коли функція задана таблицею значень з її області визначення). Використання оптимальних за точністю на класах F_N і близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій дозволяє підвищити якість запропонованих алгоритмів. Розглянуті наступні класи функцій F_N: $C_{L,N}$ – клас функцій C_L із заданими фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованої сітки t_i, $i=\overline{0,N-1}$; $W_{2,L,N}$ – клас функцій $W_{2,L}$ із заданими фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованої сітки t_i, $i=\overline{0,N-1}$.

Використовуючи наведені в роботах [2], [3] квадратурні формули обчислення перетворення Фур'є як інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та оцінки їх точності на класах F та F_N у співвідношенні (5), можна побудувати ефективну оцінку $\Phi_R(i\omega)$ частотної характеристики $\Phi(i\omega)$ на конкретних класах функцій.

Запропоновані підходи побудови $\Phi_R(i\omega)$ можна використовувати також для лінійних моделей об'єктів керування з m входами і n виходами:

$$y_j(t)=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\infty}^{t} k_{j,s}(t,\tau)x_s(\tau)d\tau, \quad j=\overline{1,n}, \tag{23}$$

де $k_{j,s}(t,\tau)$ – ІПФ по js-у каналу, яка визначається як реакція на j-у виході на збурення $x_s(u)=\delta(u-\tau)$ при $x_p\equiv 0$ (для всіх $p\neq s$).

Література

1. Методы алгоритмизации непрерывных производственных процессов. / [В.В. Иванов, А.И. Березовский, В.К. Задирака и др.]. – М. : Наука, 1975. – 400 с.
2. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье / Задирака В.К. – Киев : Наук. думка, 1983. – 216 с.

3. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / [Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. та ін.]. - Т. 1 : Алгоритми. – Киев : Наукова думка, 2011. – 448 с.; Т. 2 : Застосування. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
4. Сергієнко І.В. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин. – К. : Наук. думка, 2011. – 418 с.
5. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963 – 1100 с.
6. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Смоленцев Н.К. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
7. Дьяконов В.П. Mathcad 8-12 для студентов. Серия «Библиотека студента». – М. : СОЛОН – Пресс. – 2005. – 632 с.
8. Завьялов А.С. Методы сплайн-функций / Завьялов А.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
9. Эффективные по точности алгоритмы аппроксимации функций некоторых классов рядами Фурье / [Задирака В.К., Коломыс Е.Н., Луц Л.В. и др.] // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 4. – С. 18-35.
10. Оценки вычислительной сложности некоторых алгоритмов аппроксимации функций рядами Фурье с заданной точностью / [Коломыс Е.Н., Луц Л.В., Людвиченко В.А. и др.] // Управляющие системы и машины. – 2013. – № 4. – С. 54-79.

Literatura

1. Algorithmic methods for continuous production processes. / [VV Ivanov, AI Berezovsky, VK Zadyraka et al.] - Moscow: Nauka, 1975. - 400 s.
2. Zadyraka VK The theory of Fourier transformation / VK Zadyraka - Kiev: Science. Dumka, 1983. - 216 p.
3. Optimalni algorithmic obchislennya integraliv od shvidkoostsilyuyuchih funktsiy that їh zastosuvannya / [Sergiєnko I.V., Zadiraka VK, Litvin O. that in.]. - Volume 1: Algorithms. - Kiev: Naukova Dumka, 2011. - 448 p., T. 2 Zastosuvannya. - K.: Science. Dumka, 2011. - 348.
Sergiєnko I.V. Elements zagalnoї teorії optimality algoritmiv that sumizhni supply / I.V. Sergiєnko, V.K. Zadiraka, O.M. Litvin. - K. : Science. Dumka, 2011. - 418.
5. Gradshtein Tables of integrals, series and Artwork / IS Gradstein, IM Saffron. - Moscow: Fizmatgiz, 1963. - 1100 p.
6. Smolentsev NK Fundamentals of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB / Smolentsev NK – Moscow : DMK Press, 2005. - 304.7. Deacons VP Mathcad 8-12 for students. Series "Library of the student." - Moscow: SOLON - Press. - 2005. - 632 p.
8. Zav'yalov AS Methods of spline functions / Zav'yalov AS, brew BI, VL Miroshnichenko - Moscow: Nauka, 1980. - 352.9. Efficient algorithms for accurate approximation of certain classes of Fourier series / [Zadyraka V.K., Kolomys E.N., L. Lutz and others] / / Control and Informatics. - 2013. - № 4. - C. 18-35.
10. Evaluation of the computational complexity of some algorithms for the approximation of functions by Fourier series with the required accuracy / [Kolomys EN, L. Lutz, VA Lyudvichenko and others] / / Control systems and machines. - 2013. - № 4. - S. 54-79.

RESUME

V.K. Zadiraka, O.M. Kolomys, L.V. Luts, S.S. Melnikova

Effective by Accuracy Algorithms for Calculation of Estimation of Frequency Characteristic of Linear Model of Control Objects with Permanent Parameters

Two approaches of construction of effective with respect to accuracy algorithms for estimation of calculation of frequency characteristic of linear model of control objects with permanent parameters, based on the use of Fourier transformation are suggested.

Estimations of the calculation error of the approximate estimation of frequency characteristic by means of the approach developed are presented. Two cases are considered:

1) quadrature formulas for approximate calculation of the Fourier transformation and their calculation errors are known. In this case, the errors of calculation of the frequency characteristics are determined up to the first order quantities of smallness using the relative error of quadrature formulas used.

Using quadrature formulas for approximate calculation of the Fourier transformation as integrals of quickly oscillations functions and their estimates of accuracy on specific classes of functions, which are functions of the input and output signals of the control objects, an effective evaluation of the frequency characteristics of these classes can be built.

2) quadrature formulas for approximate calculation of the Fourier transformation and their evaluating errors are unknown, such as in the case of software (including the famous packages Matlab, MathCad, Mathematika). Since it is known that the construction of quadrature formulas is usually based on algorithms for integral function approximation in this case calculation error of frequency characteristics are determined up to first order quantities of smallness used because of the relative error of efficient algorithms for accurate approximation of functions. As these algorithms approximation of functions by Fourier, spline, polynomial interpolation, fractional rational expressions etc. can be used.

Thus, in this case the problem of calculating the frequency response is reduced to the problem of approximation of functions of input and output signals in some classes of functions defined by the searched control object.

Due to the fact that for the calculation of frequency characteristic we should calculate the estimates of the Fourier transformation, in some other cases it is necessary to use the algorithm of fast Fourier transformation (FFT), which reduces greatly the number of arithmetic operations in comparison to standard methods and is effective for speed (when the function belongs to the class of continuous functions).

Стаття надійшла до редакції 19.04.2013.